CORRIGÉ
GÉNÉRAL - MÉTROPOLE 2022
SPÉ MATHÉMATIQUES

Exercice I - Thèmes : fonction exponentielle, suites.

Partie A : Étude du premier protocole

Q1.a.

$f'(t) = 3 \times e^{-0,5t+1} + 3t \times (-0,5e^{-0,5t+1})$

(dérivée du produit de $t \to 3t$ et $t \to e^{-0,5t+1}$)

donc $f'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3 \times (-0,5t)e^{-0,5t+1} = 3(-0,5t + 1) \times e^{-0,5t+1}$.

Q1.b.

$t \to e^{-0,5t+1}$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ en particulier sur [0; 10] donc on n'étudie que le signe de $t \to -0,5t + 1$:

$-0,5t + 1 > 0 \Leftrightarrow -0,5t > -1 \Leftrightarrow t < 2$

t	0	2	10
Signe de $f'(t)$	+	0 −	
Variations de f	0 ↗	6 ↘	$30e^{-4}$

$f(0) = 0;\ f(2) = 3 \times 2e^{-0,5\times2+1} = 6e^{0} = 6.$

Q1.c. La quantité de médicament est maximale à t=2 h, elle vaut alors 6 mg.

Q2.a.

On reconnaît le théorème des valeurs intermédiaires :

- f est continue et strictement croissante sur [0; 2];
- $f(0) = 0 < 5$,
- $f(2) = 6 > 5$

donc l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur [0; 2].

x	f(x)
1	4.946164
1.01	4.97071
1.02	4.994888
1.03	5.018701
1.04	5.042152

Une valeur approchée de α est 1,02.

Q2.b.

Le médicament est efficace entre les dates $\alpha = 1,02$ h et $\beta = 3,46$ h.
$\beta - \alpha = 3,46 - 1,02 = 2,42$ h et $0,42\, h \times 60\, min = 25,2\, min$
donc le médicament est efficace pendant 2 h 25 min environ.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Q1.

Juste avant l'injection de la première heure, la quantité est $0,7 \times u_0 = 1,4$ car elle a diminué de 30%. Juste après l'injection de 1,8 g elle est donc égale à :
$u_1 = 1,4 + 1,8 = 3,2$.

Q2. À chaque heure, la quantité de médicament diminue de 30%, ce qui revient à la multiplier par 0,7 puis elle est augmentée de 1,8 g. D'où l'expression donnée.

Q3.a.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < 6$:

Initialisation : $u_0 = 2 < 6$

Hérédité : Soit n un entier naturel. On suppose que $u_n < 6$. Alors

$0,7u_n < 4,2$ donc $u_{n+1} < 4,2 + 1,8$ soit $u_{n+1} < 6$.

Conclusion : $u_0 < 6$ et cette propriété est héréditaire donc tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à 6.

Montrons maintenant que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$:

cela revient à montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Or $u_{n+1} - u_n = -0,3u_n + 1,8$ et $u_n < 6$, donc $-0,3u_n > -1,8$ d'où $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier naturel n.

Q3.b. On a montré que la suite u est croissante et majorée par 6. Elle est donc convergente.

Q3.c.

l vérifie : $0,7l + 1,8 = l$, ce qui équivaut à $1,8 = 0,3l$, équivalent à $l = 6$.

La limite de cette suite est donc 6.

Q4.a.

$v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - 0,7u_n - 1,8 = 4,2 - 0,7u_n = 0,7(6 - u_n) = 0,7v_n$.

Donc v est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$.

Q4.b.

$v_n = 4 \times 0,7^n$ donc $u_n = 6 - 4 \times 0,7^n$.

Q4.c.

$u_n \geq 5,5 \Leftrightarrow 6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5 \Leftrightarrow 0,5 \geq 4 \times 0,7^n \Leftrightarrow 0,125 \geq 0,7^n$

$\Leftrightarrow ln(0,125) \geq n \times ln(0,7) \Leftrightarrow \frac{ln(0,125)}{ln(0,7)} \leq n \Leftrightarrow n \geq 5,83$. Il faut donc 6 injections.

Exercice II - Thèmes : géométrie dans l'espace

Q1.a. Un vecteur directeur de D est u(2;-1; 2).

Q1.b.

On résout : $2 + 2t = 0 \Leftrightarrow 2 =- 2t \Leftrightarrow t =- 1$.
Pour cette valeur de t on doit avoir $x =- 1$ et $y = 3$. On vérifie :
$1 + 2 \times (- 1) = 1 - 2 =- 1$ et $2 - (- 1) = 2 + 1 = 3$. Donc $B \in D$.

Q1.c. Le vecteur AB a pour coordonnées : (0; 2;-3) donc le produit scalaire AB.u vaut : 20-12+2(-3)=-2-6=-8.

Q2.a.

Un vecteur normal à P est le vecteur directeur de D, u, donc l'équation cartésienne de P est de la forme $2x - y + 2z + d = 0$ où d vérifie
$2 \times (- 1) - 1 + 2 \times 3 + d = 0$ car $A \in P$, donc $3 + d = 0$ d'où $d =- 3$.

Q2.b.

$H \in D \cap P$ donc les coordonnées de H vérifient les équations paramétriques de D et le paramètre t est tel que $2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0$, donc
$2 + 4t - 2 + t + 4 + 4t - 3 = 0$, soit $9t + 1 = 0$, d'où $t = \frac{-1}{9}$.
Cela donne : $x = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$; $y = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9}$; $z = 2 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$.

Q2.c.

Le vecteur AH a pour coordonnées : $(\frac{7}{9} + 1;\ \frac{19}{9} - 1; \frac{16}{9} - 3)$ soit $(\frac{16}{9}; \frac{10}{9}; \frac{-11}{9})$.
On en déduit $AH = \frac{1}{9}\sqrt{16^2 + 10^2 + 11^2} = \frac{1}{9}\sqrt{256 + 100 + 121} = \frac{1}{9}\sqrt{477} = \frac{1}{3}\sqrt{53}$.

Q3.a.

H et B sont sur la droite D donc HB est un vecteur directeur de D. Comme u en est un aussi, HB et u sont colinéaires. Il existe donc k tel que $HB = k\,u$.

Q3.b.

$AB.u = HB.u$ car $AH.u = 0$ (et donc $(AB + BH).u = 0$ soit encore $AB.u + BH.u = 0$ soit enfin $AB.u =- BH.u = HB.u$), donc $AB.u = k \times u.u = k \times ||u||^2$, d'où $k = \frac{AB.u}{||u||^2}$.

Q3.c.

$k = \frac{AB.u}{||u||^2} = \frac{-8}{9}$ car $||u||^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9$.

Donc HB a pour coordonnées $(\frac{-16}{9}; \frac{8}{9}; \frac{-16}{9})$ et H a pour coordonnées $(-1 + \frac{16}{9}; 3 - \frac{8}{9}; 0 + \frac{16}{9})$ soit $(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9})$.

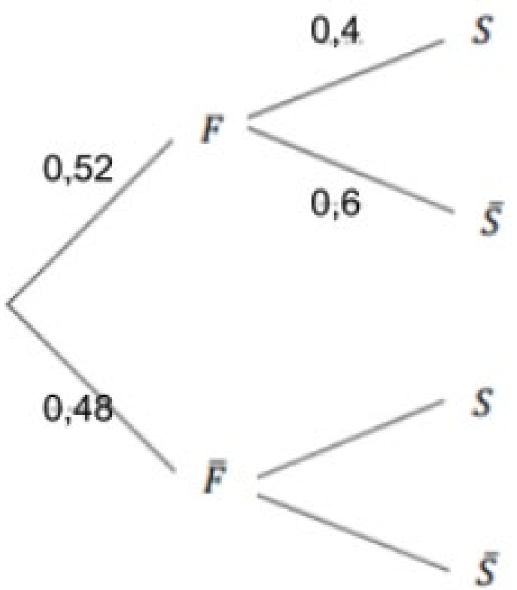
Q4.

Le volume de ABCH est égal à un tiers fois l'aire de ACH multipliée par la longueur HB (hauteur du tétraèdre). Or $HB = \frac{8}{9}||u|| = \frac{8}{3}$ et le volume de ABCH est $\frac{8}{9}$ donc $\frac{1}{3} \times A_{ACH} \times \frac{8}{3} = \frac{8}{9}$, on en déduit que l'aire de ACH est égale à 1.

Exercice III - Thèmes : probabilités

Q1.a. P(S) = 0,25

Q1.b.



Q1.c.

$P(F \cap S) = 0,52 \times 0,4 = 0,208.$

Q1.d.

$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832.$

Q1.e.

$P(\overline{F} \cap S) = P(S) - P(F \cap S) = 0,25 - 0,208 = 0,042$ donc

$P_{\overline{F}}(S) = \frac{0,042}{0,48} = 0,0875 < 0,1.$

Q2.a. C'est une loi binomiale de paramètres 20 (nombre de répétitions) et 0,25 (probabilité du succès).

Q2.b.

$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{15} \simeq 0,202$

Q2.c. La valeur obtenue est environ 0,617. C'est la probabilité que 5 salariés ou moins aient suivi le stage dans l'échantillon de 20.

Q2.d. La probabilité qu'au moins 6 salariés aient suivi le stage est la probabilité contraire de la précédente, soit 0,383.

Q3. 0,25 x 1,05 + 0,75 x 1,02 = 1,0275 donc le pourcentage moyen d'augmentation du salaire est 2,75%.

Exercice IV - Thèmes : fonctions numériques

Q1.c

Q2. d

Q3. c

Q4. a

Q5. d

Q6. c