CORRIGÉ
GÉNÉRALE - MÉTROPOLE 2022
SPÉ. MATHÉMATIQUES
SUJET CORRIGÉ DU 11 MAI

Exercice I - Thèmes : fonction exponentielle, suites.

Partie A : Étude du premier protocole

Question 1.a.

$f'(t) = 3 \times e^{-0,5t+1} + 3t \times (-0,5e^{-0,5t+1})$

(dérivée du produit de $t \to 3t$ et $t \to e^{-0,5t+1}$)

donc $f'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3 \times (-0,5t)e^{-0,5t+1} = 3(-0,5t + 1) \times e^{-0,5t+1}$.

Question 1.b.

$t \to e^{-0,5t+1}$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ en particulier sur [0; 10] donc on n'étudie que le signe de $t \to -0,5t + 1$:
$-0,5t + 1 > 0 \Leftrightarrow -0,5t > -1 \Leftrightarrow t < 2$

t	0	2	10
Signe de $f'(t)$	+	0 —	
Variations de f	0 ↗	6 ↘	$30e^{-4}$

$f(0) = 0$; $f(2) = 3 \times 2e^{-0,5\times2+1} = 6e^{0} = 6$.

Question 1.c. La quantité de médicament à t=2 h, elle vaut alors 6 mg

Question 2.a.

On reconnaît le théorème des valeurs intermédiaires :

- f est continue et strictement croissante sur [0; 2];
- $f(0) = 0 < 5$,
- $f(2) = 6 > 5$

donc l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur [0; 2].

x	f(x)
1	4.946164
1.01	4.97071
1.02	4.994888
1.03	5.018701
1.04	5.042152

Une valeur approchée de α est 1,02.

Question 2.b.

Le médicament est efficace entre les dates $\alpha = 1,02$ h et $\beta = 3,46$ h.
$\beta - \alpha = 3,46 - 1,02 = 2,42$ h et $0,42\, h \times 60\, min = 25,2\, min$
donc le médicament est efficace pendant 2 h 25 min environ.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Question 1.

Juste avant l'injection de la première heure, la quantité est $0,7 \times u_0 = 1,4$ car elle a diminué de 30%. Juste après l'injection de 1,8 g elle est donc égale à :
$u_1 = 1,4 + 1,8 = 3,2$.

Question 2. À chaque heure, la quantité de médicament diminue de 30%, ce qui revient à la multiplier par 0,7 puis elle est augmentée de 1,8 g. D'où l'expression donnée.

Question 3.a.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < 6$:

Initialisation : $u_0 = 2 < 6$

Hérédité : Soit n un entier naturel. On suppose que $u_n < 6$. Alors $0,7u_n < 4,2$ donc $u_{n+1} < 4,2 + 1,8$ soit $u_{n+1} < 6$.

Conclusion : $u_0 < 6$ et cette propriété est héréditaire donc tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à 6.

Montrons maintenant que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$:

cela revient à montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Or $u_{n+1} - u_n = - 0,3u_n + 1,8$ et $u_n < 6$, donc $- 0,3u_n > - 1,8$ d'où $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier naturel n.

Question 3.b. On a montré que la suite u est croissante et majorée par 6. Elle est donc convergente.

Question 3.c.

l vérifie : $0,7l + 1,8 = l$, ce qui équivaut à $1,8 = 0,3l$, équivalent à $l = 6$.

La limite de cette suite est donc 6.

Question 4.a.

$v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - 0,7u_n - 1,8 = 4,2 - 0,7u_n = 0,7(6 - u_n) = 0,7v_n$.

Donc v est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$.

Question 4.b.

$v_n = 4 \times 0,7^n$ donc $u_n = 6 - 4 \times 0,7^n$.

Question 4.c.

$u_n \geq 5,5 \Leftrightarrow 6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5 \Leftrightarrow 0,5 \geq 4 \times 0,7^n \Leftrightarrow 0,125 \geq 0,7^n$

$\Leftrightarrow ln(0,125) \geq n \times ln(0,7) \Leftrightarrow \frac{ln(0,125)}{ln(0,7)} \leq n \Leftrightarrow n \geq 5,83$. Il faut donc 6 injections.